

# Praca i energia

Dr hab. inż. Jarosław Kanak  
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321  
[kanak@agh.edu.pl](mailto:kanak@agh.edu.pl)  
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>

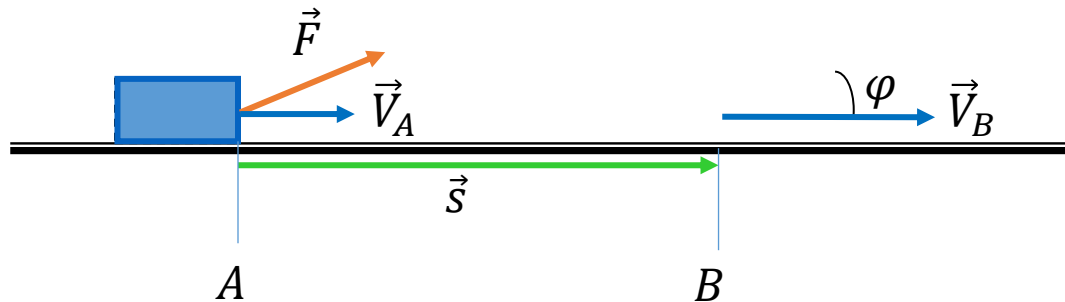


# Energia a praca

---

- Energia jest to wielkość skalarna, charakteryzująca stan, w jakim znajduje się jedno lub wiele ciał. Np. energia kinetyczna jest związana ze stanem ruchu ciała.
- Praca jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana w wyniku działania na ciało siłą. Gdy energia jest przekazana ciału, praca jest dodatnia, a gdy energia jest ciału odebrana, praca jest ujemna. Praca jest równa zmianie energii.
- Jednostką energii i pracy w układzie SI jest 1J.

# Praca siły stałej



Wektor przesunięcia:  $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$

$$W = \vec{F} \circ \vec{s} = F \cdot s \cos \varphi \cdot$$

Wskutek wykonanej nad ciałem pracy wzrasta jego prędkość od  $V_A$  do  $V_B$  czyli rośnie energia kinetyczna

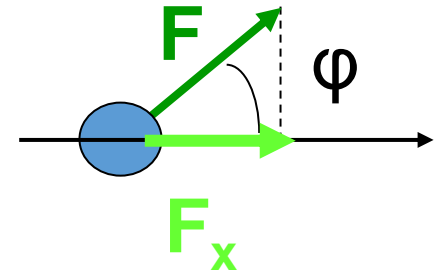
# Praca siły stałej



Pracę wykonuje składowa x-owa siły  $F$

$$W_{AB} = F_x \cdot s = m \cdot a_x \cdot s$$

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{v_B - v_A}{t} \\ s &= v_A \cdot t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s = \frac{v_B + v_A}{2} t \quad \text{zatem}$$



$$W_{AB} = m \frac{v_B - v_A}{t} \cdot \frac{v_B + v_A}{2} t$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

ale  $p = m \cdot v$

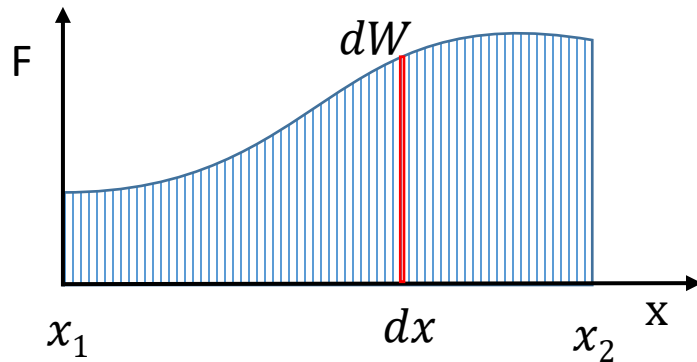
$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

Praca wykonana przez siłę nad cząstką swobodną jest równa zmianie energii kinetycznej cząstki

# Praca siły niejednostajnie zmiennej



Założmy, że siła  $F$  zależy od położenia  $x$  czyli  $F(x)$



$$\Delta W_i = F_i \Delta x_i$$

$$W \approx \sum_{i=1}^n F_i \Delta x_i$$

Gdy  $\Delta x$  jest bardzo małe i zmierza do 0

$$W = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} F_i \Delta x_i$$

$$\Delta x = dx$$

$$dW = F dx$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

# Praca siły niejednostajnie zmiennej



W ogólnym przypadku:  $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow d\vec{r} = \vec{V} dt$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{V} dt$$

Moc jest definiowana jako:  $P = \frac{dW}{dt}$

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P dt \rightarrow P = \vec{F} \circ \vec{V}$$



# Przykład

Elektrowóz rozwija moc  $P = 1800$  kW i ciągnie po poziomym torze skład wagonów o łącznej masie  $m = 2000$  ton. Współczynnik tarcia kół o szyny wynosi  $\mu = 0,005$ . Oblicz:

- Maksymalną szybkość pociągu;
- Przyspieszenie pociągu w chwili, gdy porusza się z szybkością  $V_1 = 4$  m/s.

Rozwiązanie

- Warunek osiągnięcia maksymalnej szybkości?

$$P = F \cdot V$$

$$V_{max} = \frac{P}{mg\mu} = 18.3 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

- II zas. dyn. Newtona

$$a = \frac{P}{mV_1} - \mu g = 0.17 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$



# Energia potencjalna

---

praca wykonana nad ciałem może zmienić nie tylko **energię kinetyczną** lecz również energię **potencjalną ciała**

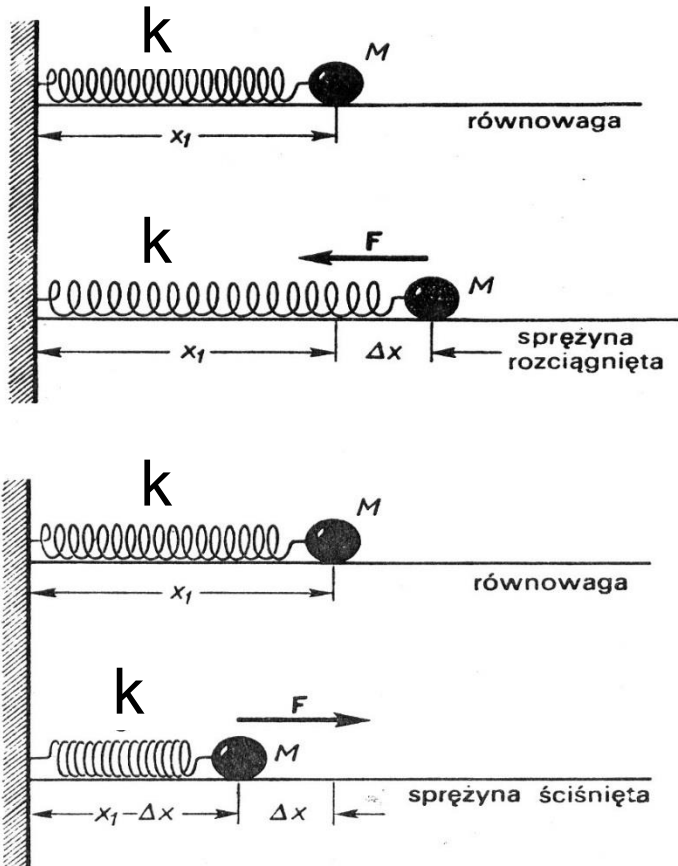
Podnosząc ciało na pewną wysokość zmieniamy jego energię potencjalną

$$E_p = mgh$$

Jakie są inne niż grawitacyjna, rodzaje energii potencjalnej?



# Energia potencjalna sprężystości



Praca siły zależnej od położenia – siły harmoniczej

$$F = -k(x - x_1) \quad \rightarrow \quad \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$W = \int dW = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx$$

$$W = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

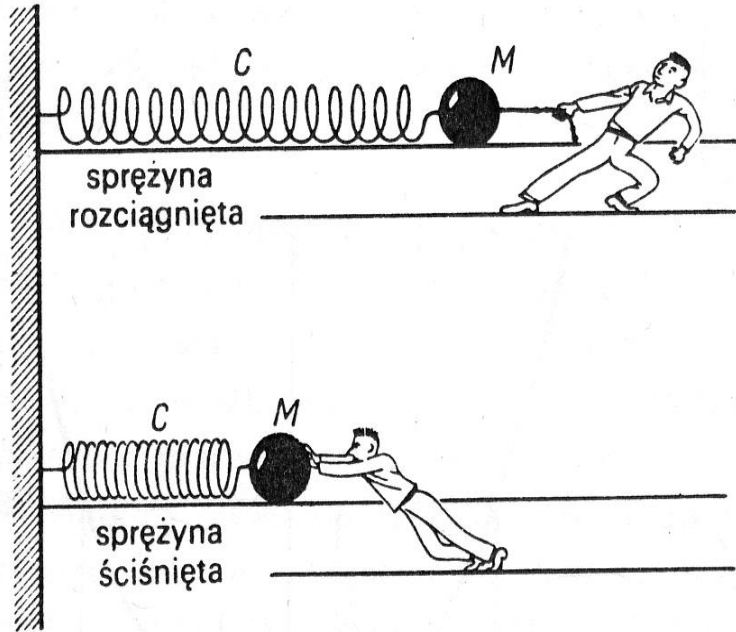
$$W = \frac{k}{2} (x_1^2 - x_2^2) \quad \text{skoro}$$

$$W = -\Delta E_p \Rightarrow E_p = \frac{kx^2}{2}$$

Energia  
potencjalna  
sprężystości

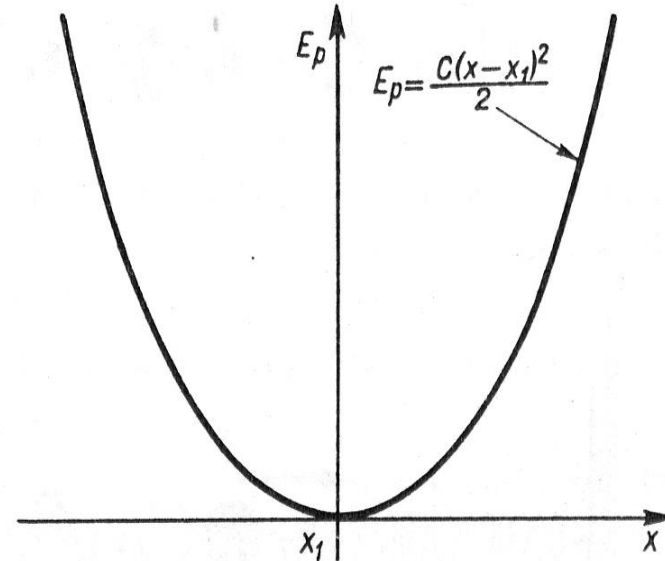
$W$  – praca wykonana przez siłę sprężystości

# Energia potencjalna sprężystości



Rys. 5.13. Aby rozciągnąć (lub ścisnąć) sprężynę, należy wyrzucić siłę o kierunku przeciwnym do kierunku siły sprężystej. Przy przesunięciu sprężyny o wartość  $\Delta x$  z położenia równowagi  $x_1$  należy wykonać pracę

$$W = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} C(x - x_1) dx = \frac{1}{2} C(\Delta x)^2.$$



Rys. 5.14. Wykonując tę pracę zwiększamy energię potencjalną układu masa-sprężyna. Ten układ przesunięty z położenia równowagi o  $\Delta x = x - x_1$  ma energię potencjalną  $E_p = \frac{1}{2} C(\Delta x)^2 = \frac{1}{2} C(x - x_1)^2$ .

Kittel, Mechanika



- Energia potencjalna  $E_p$  jest to energia związana z konfiguracją układu ciał, działających na siebie siłami.
- Aby móc wprowadzić pojęcie energii potencjalnej, pole sił musi mieć określoną własność, taką, że praca wykonana w tym polu nie może zależeć od drogi, wzdłuż której zachodzi przemieszczenie

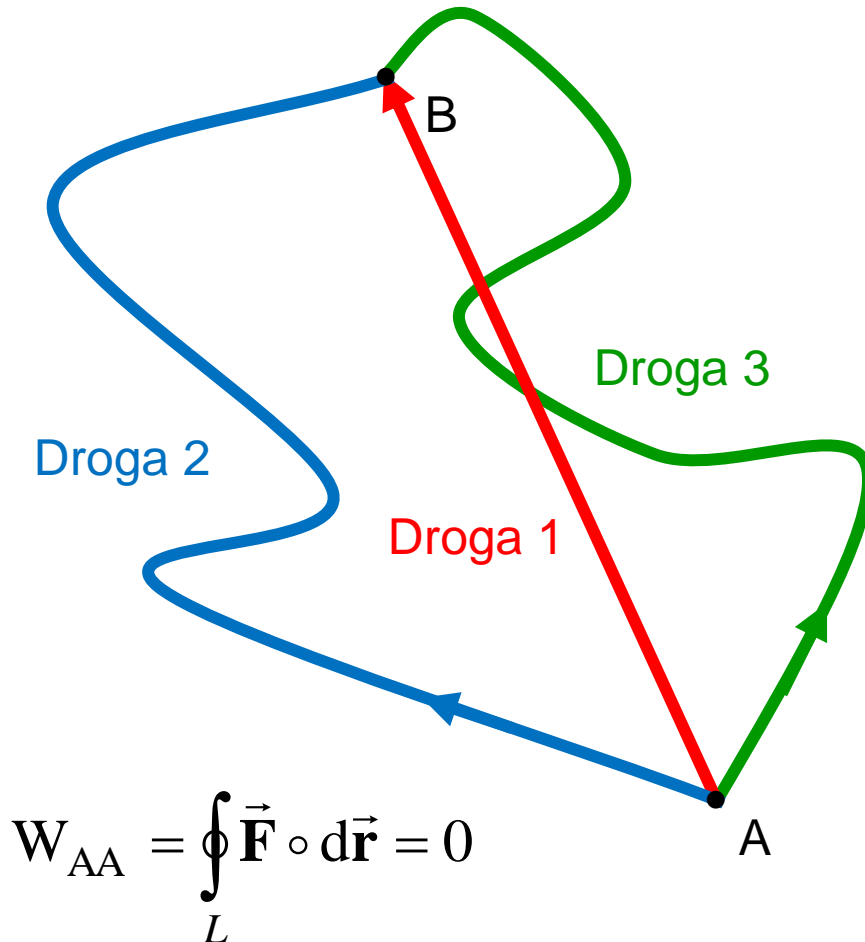
Takie pola i siły nazywamy **zachowawczymi**

# Siła zachowawcza



Praca wykonana przez siłę zachowawczą nie zależy od drogi lecz zależy jedynie od położenia punktów A i B.

$$W_{AB}^{\text{droga1}} = W_{AB}^{\text{droga2}} = W_{AB}^{\text{droga3}}$$



Praca wykonana przez siłę zachowawczą nad cząstką poruszającą się po drodze zamkniętej jest równa zero

$$W_{AA} = W_{AB} + W_{BA} = 0$$



# Przykład 1

Dane jest pole wektorowe o składowych  $F_x = Ky$ ;  $F_y = Kx$ ;  $F_z = 0$ ;  
gdzie  $K$  jest stałą. Sprawdzić czy to pole jest zachowawcze  
obliczając pracę po konturze trójkątnym o bokach  $y = x$ ;  $y = 0$ ;  $x = x_0$ .

$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$  wektor siły w układzie  
kartezjańskim

$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$

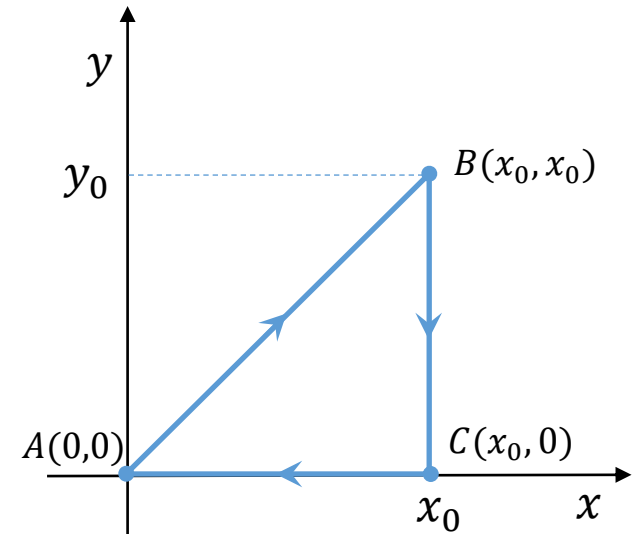
$d\vec{r} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$

$\vec{F} = Ky \hat{i} + Kx \hat{j} + 0 \hat{k}$  wektor siły z zadania

$\vec{F} \circ d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$\vec{F} \circ d\vec{r} = Ky dx + Kx dy + 0 dz = Ky dx + Kx dy$

$$W = \int \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_C^A \vec{F} \circ d\vec{r} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$



# Przykład 1



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = \underbrace{\int_0^{x_0} Ky dx}_{y=x} + \underbrace{\int_0^{y_0} Kx dy}_{x=y}$$

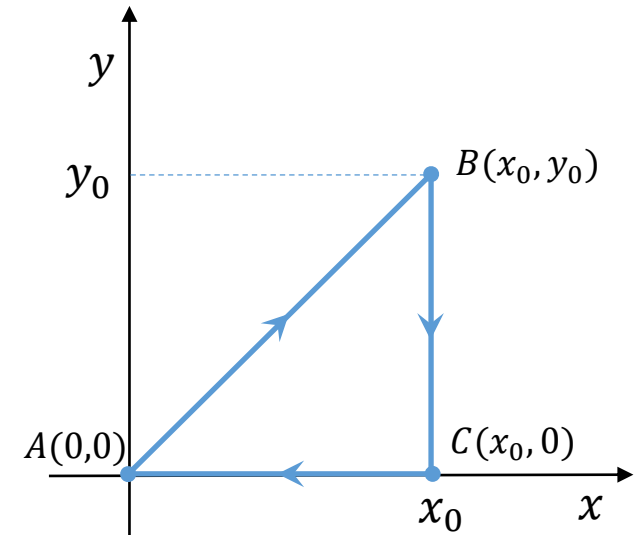
$$W_{AB} = K \int_0^{x_0} x dx + K \int_0^{y_0} y dy$$

$$W_{AB} = K \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_0} + K \frac{y^2}{2} \Big|_0^{y_0} = K \frac{x_0^2}{2} + K \frac{y_0^2}{2} = K x_0^2$$

$$W_{BC} = \int_B^C \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{x_0}^0 Ky dx + \int_{y_0}^0 Kx dy = K yx \Big|_{x_0}^0 + K x_0 y \Big|_{y_0}^0 = -K x_0 y_0 = -K x_0^2$$

$$W_{CA} = \int_C^A \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_{x_0}^0 K \cdot 0 dx + \int_0^0 Kx dy = 0$$

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 0$$





## Przykład 2

Na cząstkę działa siła  $\mathbf{F} = (3x^2 \text{ N})\mathbf{i} + (4y \text{ N})\mathbf{j}$  gdzie  $x$  i  $y$  są wyrażone w metrach. W wyniku działania siły cząstka przemieszcza się z punktu A(2 m, 3 m) do punktu B(2 m, 0). Zakładamy, że cząstka w punktach A i B spoczywa względem przyjętego układu odniesienia. Jaką pracę wykonuje ta siła nad cząstką? Jaki jest skutek energetyczny wykonanej pracy?

$$W = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$F_x = 3x^2$$

$$F_y = 4y$$

$$F_z = 0$$

$$W_{AB} = \int_2^2 3x^2 dx + \int_3^0 4y dy$$

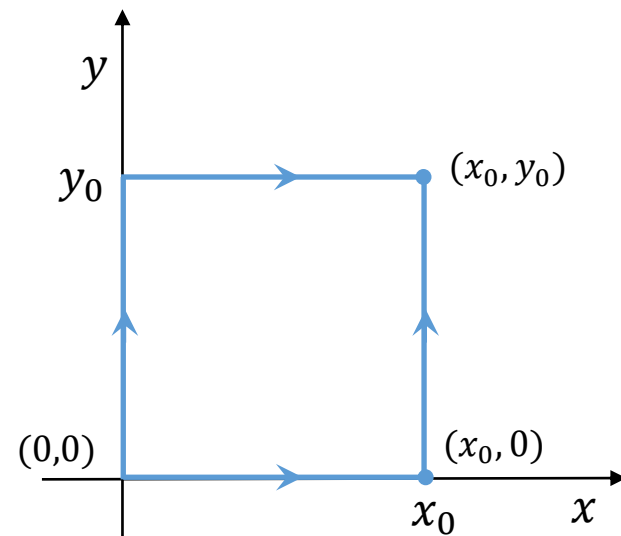
$$W_{AB} = 0 + 2y^2 \Big|_3^0 = -18 \text{ [J]}$$

# Zadanie



Pole sił dane jest wzorem:  $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (3xy)\mathbf{j}$

Obliczyć całkę krzywoliniową od punktu  $(0,0)$  do punktu  $(x_0, y_0)$  wzdłuż drogi składającej się z dwóch prostych odcinków od  $(0,0)$  do  $(x_0, 0)$  i  $(x_0, 0)$  do  $(x_0, y_0)$ . Porównać z wynikiem otrzymanym przy przyjęciu dwóch innych boków prostokąta jako drogi całkowania. Czy siła jest zachowawcza?







- Siła ciężkości – siła grawitacji
- Siła oddziaływania elektrostatycznego – siła Coulomba

są siłami zachowawczymi

- Przykładem siły niezachowawczej jest siła tarcia

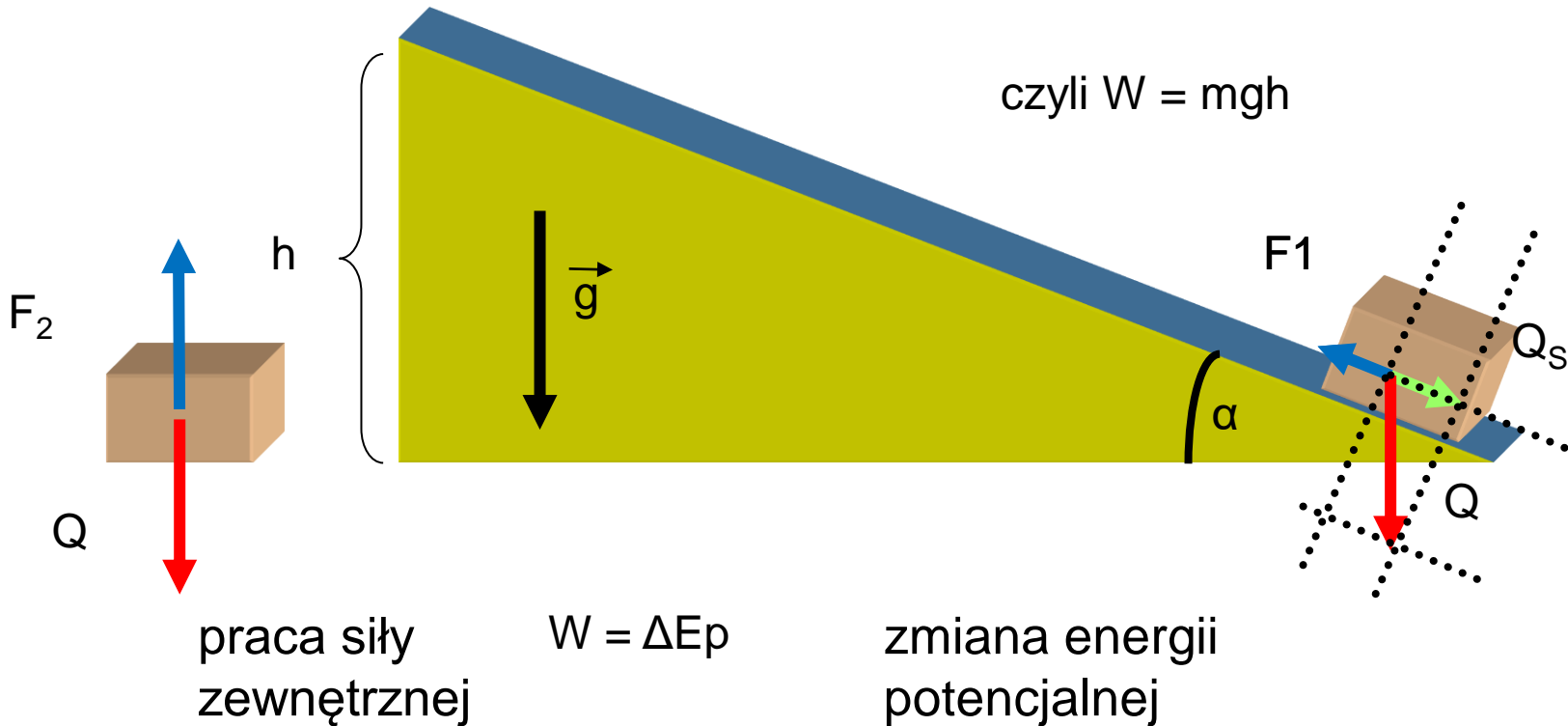
# Praca w jednorodnym polu grawitacyjnym



$$W = F_1 s = Q_s h / \sin \alpha$$

$$\text{ale } Q_s = Q \sin \alpha \quad \text{i } Q = mg$$

$$\text{czyli } W = mgh$$

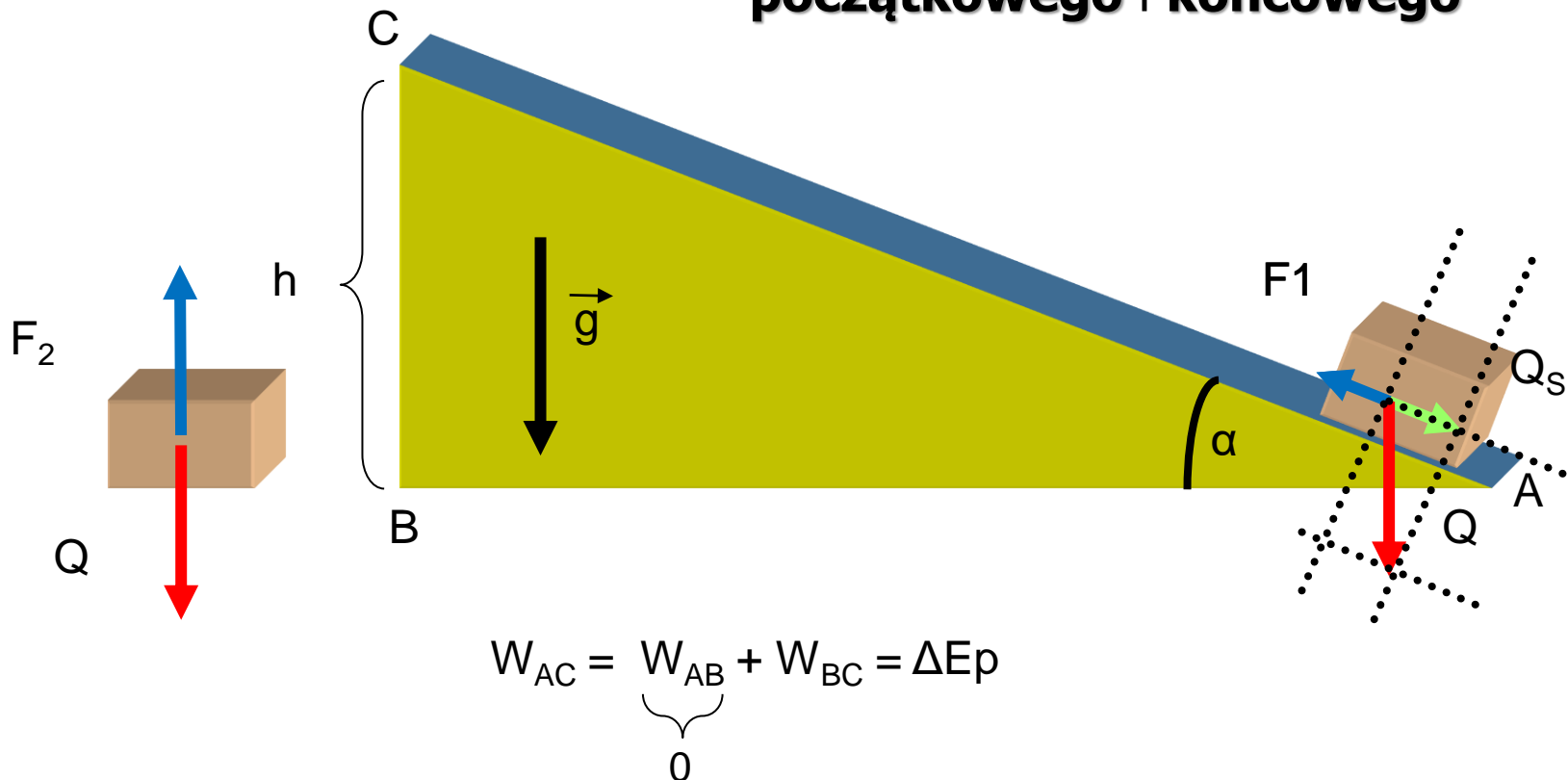




# Jednorodne pole grawitacyjne

Jednorodne pole grawitacyjne jest **zachowawcze**

Praca siły zewnętrznej równoważącej siłę ciężkości nie zależy od sposobu przemieszczania ciała lecz od położenia punktów **początkowego i końcowego**



# Siła centralna – siła zachowawcza



Siła centralna jest **siłą zachowawczą**

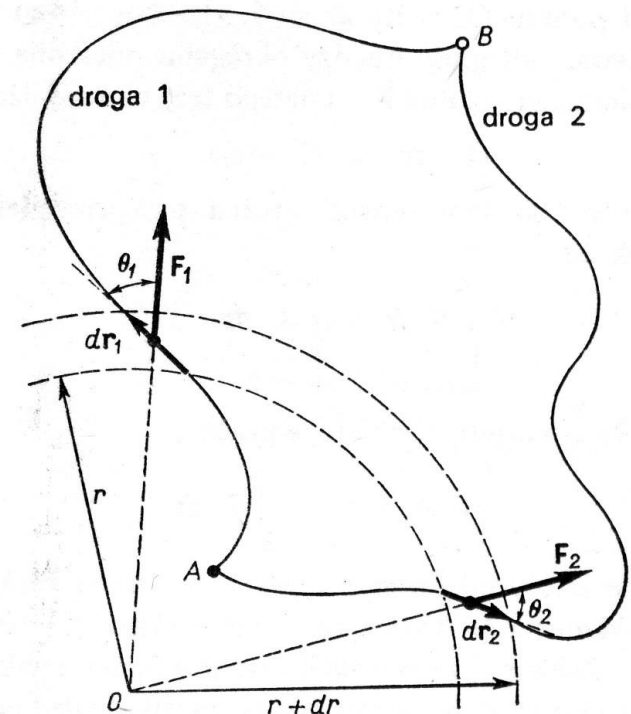
Siła centralna  $\vec{F} = f(r)\hat{r}$

Przykłady sił centralnych:

siła grawitacji  $\vec{F}(\mathbf{r}) = G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$

siła Coulomba  $\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$

siła sprężystości  $\vec{F}(\mathbf{r}) = -kr\hat{\mathbf{r}}$





# Jak obliczać energię potencjalną?

Różnica energii potencjalnej cząstki w punktach A i B jest równa pracy wykonanej przez siłę przyłożoną do cząstki przy jej przesunięciu od A do B

$$E_p(B) - E_p(A) = W(A \rightarrow B)$$

Wartość energii potencjalnej w punkcie  $\mathbf{r}$  jest określona z dokładnością do stałej  $E_p(A)$ , którą można obrać umownie. Sens fizyczny ma jedynie różnica energii potencjalnej pomiędzy dwoma punktami.

$$E_p(\mathbf{r}) = E_p(A) - \int_A^{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

siła oddziaływania (siła pola)

*Umowa: A leży w nieskończoności czyli  $E_p(\infty)=0$*

$$E_p(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{F}} \circ d\vec{\mathbf{r}}$$

# Siła zachowawcza a energia potencjalna



Siła zachowawcza	Energia potencjalna	Układ:
$\vec{F} = m\vec{g}$	$E_p(x) = mgx$	masa m - Ziemia
$\vec{F}(r) = G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}$	$E_p(r) = -G \frac{Mm}{r}$	masa m – masa M
$\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$	$E_p(r) = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$	ładunek q – ładunek Q
$\vec{F}(r) = -kr\hat{r}$	$E_p(r) = \frac{1}{2} kr^2$	masa m – sprężyna k

# Związek pomiędzy siłą a energią potencjalną



Przypadek jednowymiarowy

$$E_p(x) = - \int_{\infty}^x F_x dx$$

$$F_x = - \frac{dE_p}{dx}$$

Przypadek trójwymiarowy

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{F} \circ d\vec{r}$$

$$\vec{F} = - \frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{F} = - \overrightarrow{grad} E_p = - \vec{\nabla} E_p$$

Operator „nabla”:

$$\vec{\nabla} = - \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$



# Przykład – siła sprężystości

Energia potencjalna układu masa-sprężyna dana jest wzorem:

$$E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$$

Sprawdzić, stosując wzór:  $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$

czy siła oddziaływania sprowadza się do postaci:  $\vec{F}(r) = -k\vec{r}$

$$E_p(r) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \quad \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_p(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = kx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}E_p(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = ky$$

$$\frac{\partial}{\partial z}E_p(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = kz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}E_p = kx\hat{i} + ky\hat{j} + kz\hat{k}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p = -k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = -k\vec{r}$$

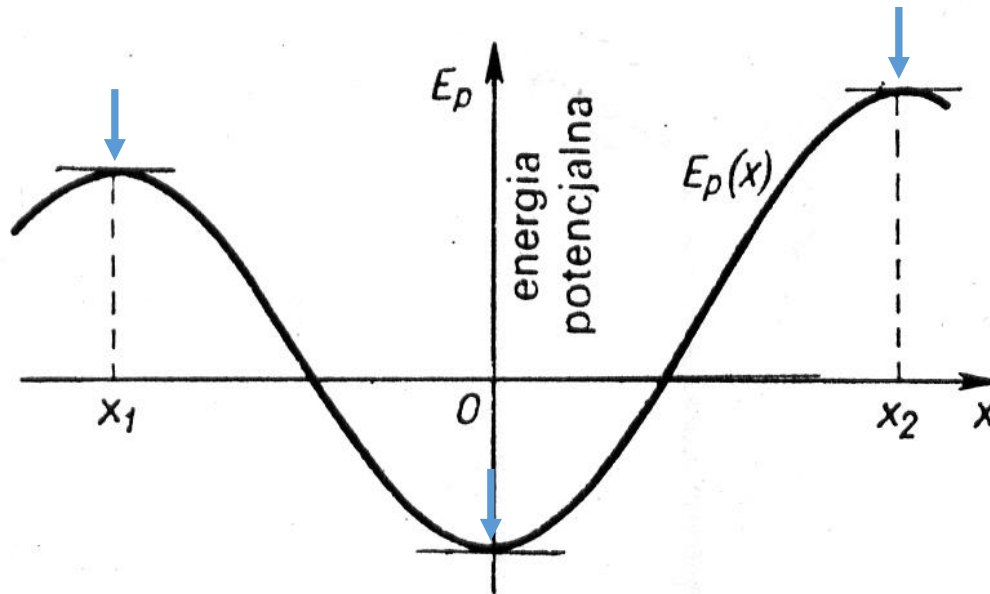


# Położenie równowagi



Warunek równowagi:

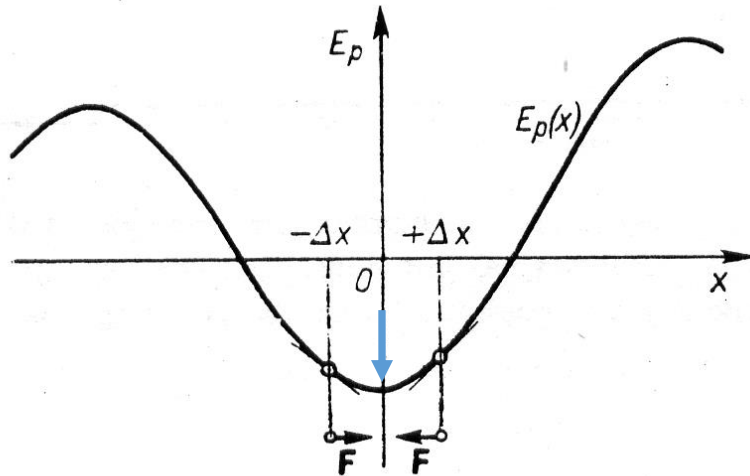
$$F = 0 \rightarrow \frac{dE_p}{dx} = 0$$



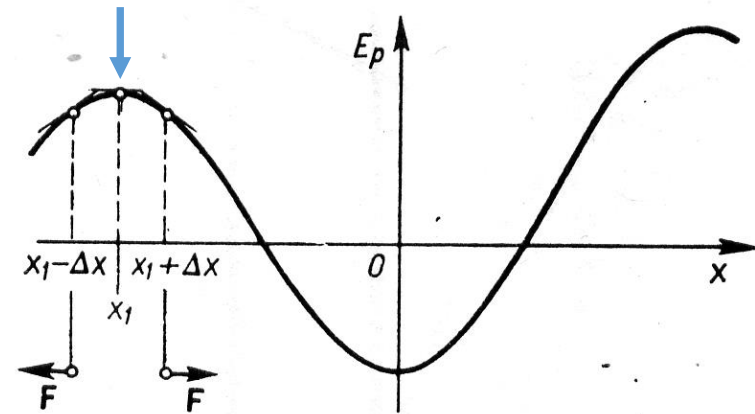
# Położenie równowagi



Równowaga **trwała**, energia potencjalna  $E_p$  wykazuje minimum



Równowaga **nietrwała**,  $E_p$  wykazuje maksimum



Równowaga **obojętna**, energia potencjalna  $E_p$  jest stała, niezależna od położenia

# Wielkości charakteryzujące pole grawitacyjne

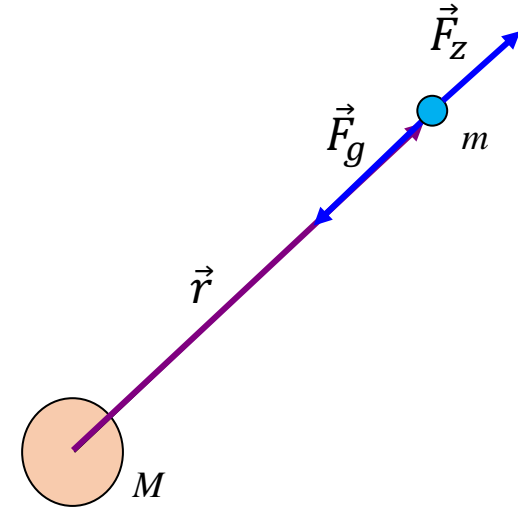


- Siła grawitacji

$$\vec{F}_g = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \hat{r}$$

- Natężenie pola

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$



- Energia potencjalna

Obliczmy pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną przy przesunięciu ciała z  $r \rightarrow \infty$  :

Aby nie zmieniać energii kinetycznej, ciało jest przesuwane przez siłę zewnętrzną  $F_z$  skierowaną przeciwnie do siły grawitacji i co do wartości  $F_z = F_g$

# Energia potencjalna w polu grawitacyjnym



$$W_z = \int_r^\infty \vec{F}_z \circ d\vec{r} = GMm \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} \Big|_r^\infty = -\frac{GMm}{\infty} + \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{r}$$

zatem:  $W_z = \frac{GMm}{r} = \Delta E_p$        $\Delta E_p = \Delta E_{p\infty} - \Delta E_{pr} = W_z = 0 - \Delta E_{pr}$

$E_p \stackrel{df}{\equiv} W_{g(\infty \rightarrow r)} = W_{z(r \rightarrow \infty)} \longrightarrow \boxed{E_{pr} = -\frac{GMm}{r}}$

skoro  $W_g = \int_\infty^r \vec{F}_g \circ d\vec{r} = -E_p \longrightarrow F_g = -\frac{dE_p}{dr}$

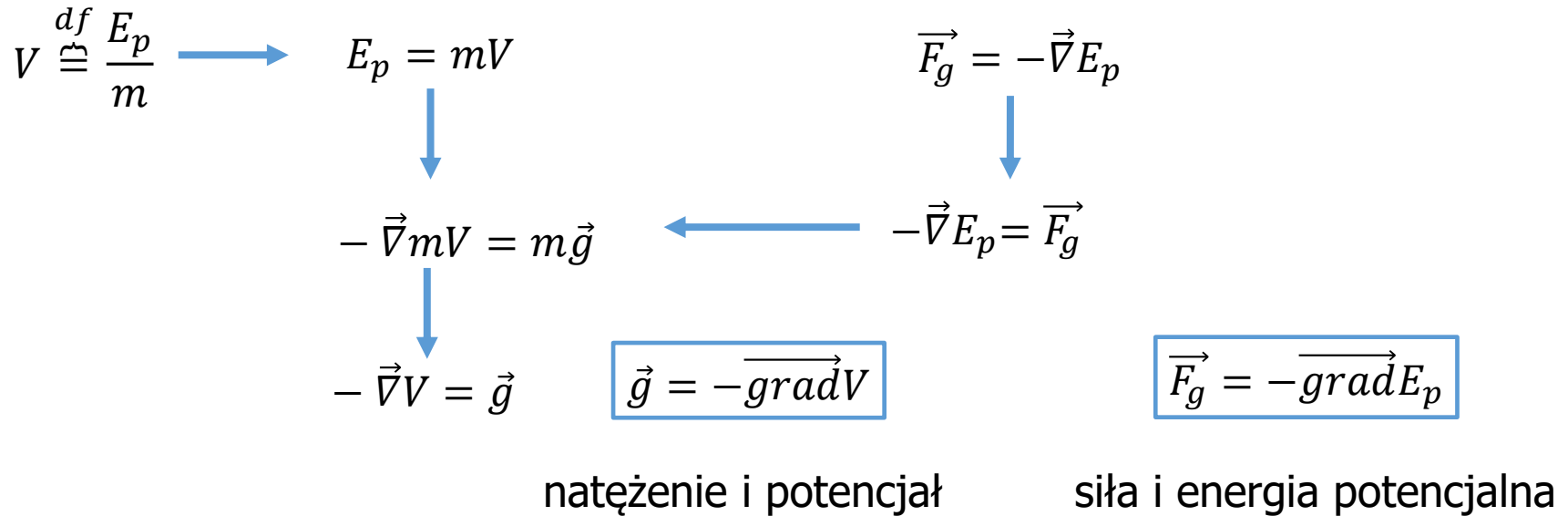
Dla przypadku 3D można zapisać:  $\vec{F}_g = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \hat{k}\right)$

$$\vec{F}_g = -\vec{\nabla} E_p$$

gdzie:  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$

$$\boxed{\vec{F}_g = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p}$$

# Potencjał grawitacyjny



Przykład.

Dane jest pole wektorowe o składowych  $F_x = Ky$ ;  $F_y = Kx$ ;  $F_z = 0$ ; gdzie  $K$  jest stałą. Pole działa na masę  $m$ . Sprawdzono, że pole jest zachowawcze. Czy istnieje potencjał tego pola  $V(x,y)$ ? Jeśli tak, to ile on wynosi?

# Potencjał grawitacyjny



Rozwiązanie:

$$\vec{F}_g = -\vec{\nabla} E_p = m\vec{\nabla} V$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} = -m \left( \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{F_x}{m}; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{F_y}{m}$$

$$V = -\frac{1}{m} \int_0^x F_x dx = -\frac{1}{m} \int_0^x Ky dx = -\frac{1}{m} Kxy$$

$$V = -\frac{1}{m} \int_0^y F_y dy = -\frac{1}{m} \int_0^y Kx dy = -\frac{1}{m} Kxy$$

$$V = -\frac{Kxy}{m}$$

# Zasada zachowania energii



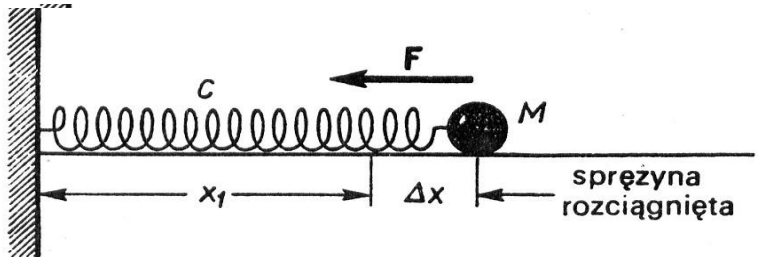
W układzie izolowanym, w którym zmiany energii pochodzą jedynie od sił zachowawczych energia kinetyczna i potencjalna mogą się zmieniać, lecz ich suma czyli energia mechaniczna  $E_{\text{mech}}$  nie może ulegać zmianie.

$$0 = \Delta E_k + \Delta E_p \quad \rightarrow \quad 0 = E_{k2} - E_{k1} + E_{p2} - E_{p1}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} \quad \Rightarrow \quad E_k + E_p = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0$$

# ZZE – oscylator harmoniczny



$$E_k = m \frac{v^2}{2}$$

$$E_p = k \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{v^2}{2} + k \frac{x^2}{2} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (E_k + E_p) = 0$$

$$\frac{m}{2} 2v \frac{dv}{dt} + \frac{k}{2} 2x \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

równanie oscylatora  
harmonicznego

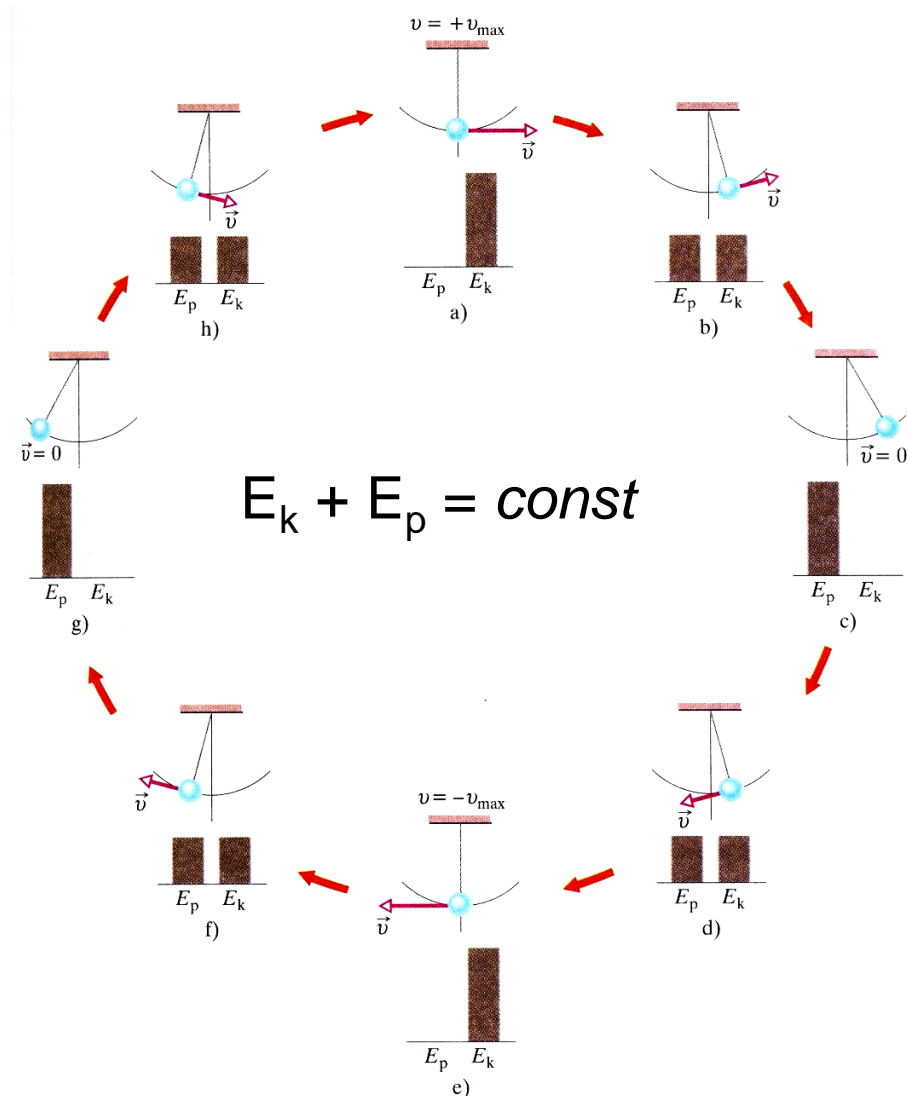


# ZZE – oscylator harmoniczny



Zmiany energii w  
układzie:  
wahadło-Ziemia

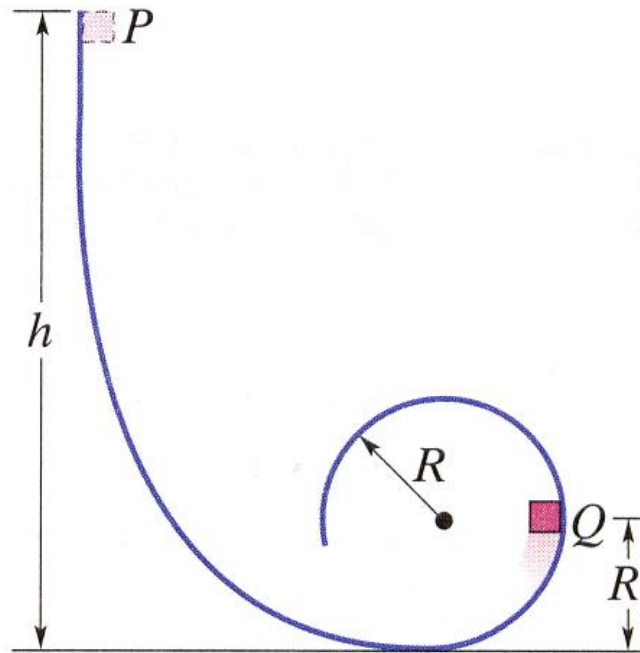
$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$



# Zadanie



Z jakiej najmniejszej wysokości  $h$  musi zjechać klocek aby nie oderwał się od toru w najwyższym punkcie pętli kołowej?



# ZZE – pole grawitacyjne



Ciało wyrzucone z powierzchni planety będzie poruszało się w jej polu grawitacyjnym. Z jaką minimalną prędkością trzeba je wyrzucić aby oddaliło się do nieskończoności?

Zgodnie z ZZE

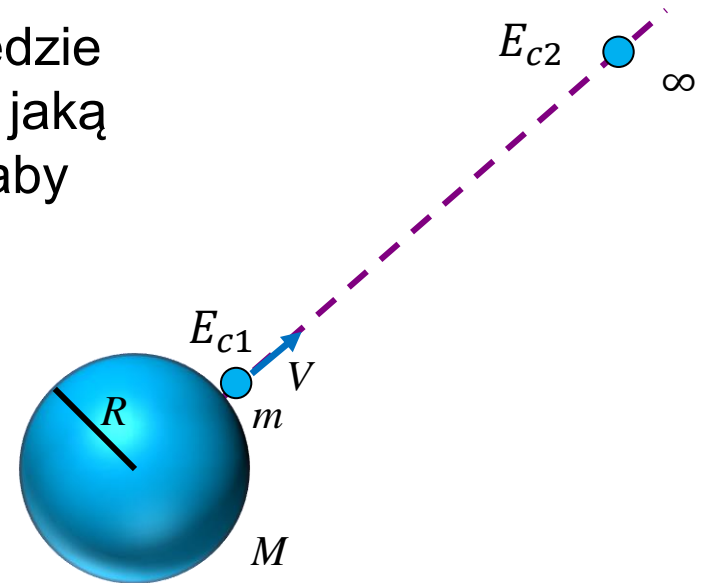
$$E_{c1} = E_{c2}$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{mV_{\infty}^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{\infty}\right)$$

$$\frac{mV^2}{2} + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 + 0$$

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{GMm}{R} \quad V^2 = \frac{2GM}{R} \quad V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$



Wzór na drugą prędkość kosmiczną

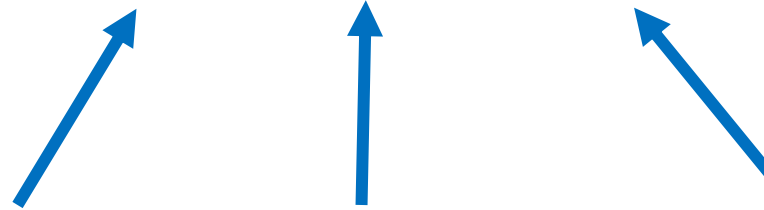
$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Dla Ziemi:  $V_{II} = 11.19 \frac{km}{s}$

# Związek między pracą a energią mechaniczną



$$W = \Delta E_k + \Delta E_p$$



Praca siły  
zewnętrznej

Zmiana energii  
kinetycznej

Zmiana energii  
potencjalnej

Praca siły zewnętrznej wykonanej nad układem prowadzi do zmiany energii mechanicznej  $W = \Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_k + \Delta E_p$



- Istnieje ścisły związek pomiędzy pracą a energią
- O energii potencjalnej układu można mówić tylko dla sił zachowawczych
- Zasada zachowania energii mechanicznej pozwala rozwiązywać zagadnienia, które są trudne lub niemożliwe do rozwiązania na gruncie zasad dynamiki
- Całkowita energia jest wielkością stałą. Energia może być przekształcana z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona

$$W = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{term}} + \Delta E_{\text{wew}}$$



# Przykład

## Wahadło balistyczne

Pocisk wystrzelony z szybkością  $V_0$  wbija się w masywną tarczę zawieszoną na linie o długości  $L$ .

Masa tarczy jest  $n$ -razy większa od masy pocisku.

Lina z zawieszoną tarczą po trafieniu przez pocisk odchyła się o kąt  $\alpha$ .

Obliczyć początkową szybkość pocisku.

